



TITLE:

Circle Packing and Riemann Surfaces

AUTHOR(S):

東木, 雅彦

CITATION:

東木, 雅彦. Circle Packing and Riemann Surfaces. 数理解析研究所講究録 1995, 893: 43-53

ISSUE DATE:

1995-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84430>

RIGHT:

Circle Packing and Riemann Surfaces

東工大理 東木 雅彦 (Masahiko Toki)

コンパクトな, 三角形分割された面に対して, その nerve が与えられた三角形分割であるような circle packing が存在する. (Andreev — Thurston) この結果もコンパクトな, 境界付きの面にまで拡張する.

\bar{S} をコンパクトな, 境界付きの面 (ただし, 球やトーラスは除外する) とする. また, T と \bar{S} の三角形分割, V と T の頂点の集合とする.

定義 1. V から $(0, +\infty]$ への写像を, hyperbolic radius function という.

r を hyperbolic radius function とする. \bar{S} の各三角形 T に対して, 以下のような三角形 $T(r, \epsilon)$ を考える.

てが頂点 v_1, v_2, v_3 をもつとする。単位円板 $D = \{|z| < 1\}$ 上に、双曲的半径が $r(v_1), r(v_2), r(v_3)$ の円を考える。(ただし、半径 $+\infty$ の円は ∂D に 1 点で接する円とする。) これらの 3 つの円を等長変換で動かして、3 つの円が外側から互いに接するようにする。ただし、三角形 τ の頂点の循環的順序が保たれるようにする。このとき、3 つの円の双曲的中心 (半径 $+\infty$ の円の中心はその円の ∂D との接点とする。) を頂点とする双曲的三角形が $T(r, \tau)$ である。

定義 2. これらの双曲的三角形 $T(r, \tau)$ を互いに交わらないと見なした後再び T の辺に沿って自然に糊づけしたものは V の点に対応する点を除いて、定曲率 -1 をもつ (\bar{S} と同相な) 面である。この面を r によって決定される cone manifold と呼び、 $\text{Cone}(r)$ で表わす。

今、hyperbolic radius function r が次の 2 つの性質をもつとする

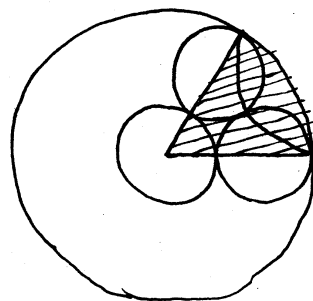
$$(1) \quad \text{境界上で} \quad r(v) = +\infty$$

$$(2) \quad \text{内部で} \quad K_r(v) = 0$$

ここで、 $K_r(v)$ は v における r の曲率とする。

このとき、 $\text{Cone}(r)$ 上の metric は特異点をもたない。

\bar{S} が境界をもつとき, この *metric* が完備になるように $\text{Cone}(r)$ を拡張したい. これは, \bar{S} の境界上に辺をもつ三角形でのそれぞれに対し, 三角形 $T(r, \tau) \subset D$ に境界辺によ, τ 切りとられた半平面をつけ加えることによ, τ 達成される.



定義. こうして $\text{Cone}(r)$ を拡張したものを complete hyperbolic polyhedral surface と呼び, $\text{Poly}(\bar{S})$ で表わす.

注意. 後で述べる Proposition 2 によれば, (1)と(2)をみたす *hyperbolic radius function* は唯一つ存在する.

定義 4. \bar{S} の境界上の各辺を, 同じ端点をもち, 他のすべての点は (その境界辺を含む) 三角形の内部にあるような単純曲線にとりかえる. このようにして, \bar{S} のある部分面の三角形分割を得る. この三角形分割を \bar{S} の scallop ed triangulation という.

X もコンパクトな, 境界付き Riemann 面とし,

$$\pi: D \rightarrow X$$

を, 正則な普遍被覆写像とする.

定義 5. X 上の 3 つの (双曲的) 円板が互いに外側から接しているとする. これら 3 つの円板の中心を結ぶ測地線が定める三角形を triangle of centers と呼ぶ.

\bar{X} 上の, 内部は互いに交わらない閉円板の族が与えられているとして, 互いに接する 3 つの円板からなる組の triangle of centers のすべてを考える. もしこれらが \bar{X} の scallop-triangulation をなすなら, 上の円板族も \bar{X} 上の circle packing という.

このとき, \bar{X} の scallop-triangulation の境界辺を, 対応する \bar{X} の境界辺でおきかえてできる \bar{X} の三角形分割を, circle packing の (embedded) nerve という.

定理 1. \bar{S} をコンパクトな, 境界付きの面とし, T をその三角形分割とする. \bar{S} は球やトーラスではないとする. このとき, \bar{S} 上の定曲率 -1 をもった完備な metric λ と, この metric λ が定める \bar{S} の等角構造に関する circle packing ϕ が存在して, ϕ の nerve は T である. さらに, metric λ と ϕ が決定する hyperbolic radius function r は次の意味で unique である: もし λ_1 と r_1 が他の組なら $r = r_1$ であり, また \bar{S} 上の

自己同相写像があり、それは λ metric から λ_1 metric への等長写像であり T の各三角形をそれ自身に写す。

定理 1 は次の定理から容易に従う。

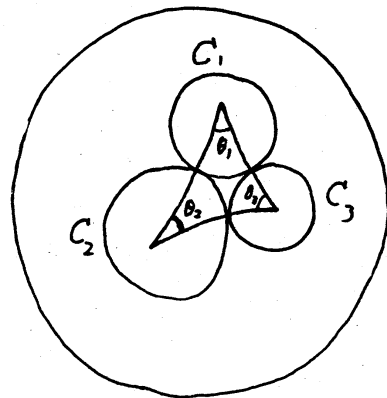
定理 2. \bar{S} をコンパクトな、境界付きの面とし、 T をその三角形分割とする。 \bar{S} は球やトーラスではないとする。このとき、(1) と (2) をみたす hyperbolic radius function r が唯一存在する。

この定理の証明の中で次の補題を数回用いる。

補題. 単位円板 D 内の、互いに外側から接する 3 つの円 C_1, C_2, C_3 を考える。(ただし、半径 $+\infty$ の円つまり ∂D に接する円も許す。) この 3 円の triangle of centers において、 C_i ($i=1, 2, 3$) の中心を頂点とする角度を θ_i とする。

もし C_1 の半径が小さくなり、他の 2 つは変わらないとすると θ_1 は大きくなり、他の 2 つは小さくならない。さらに三角形の面積は小さくなる。

証明は明らか。



定理2の証明. 証明は Dirichlet問題に対する Perronの方法に類似している. \bar{S} 上の hyperbolic radius functionの中で, 各内頂点における曲率が正でないものからなる族を \mathcal{R} とする. Thurstonの定理(定理2を \bar{S} が境界をもたない場合に制限したもの)によれば, 種数が2以上の(三角形分割された)閉いた面上には各頂点における曲率が0であるような hyperbolic radius function が存在する. したがって \bar{S} を種数2以上の閉いた面に埋め込むことによつて \mathcal{R} が空でないことがわかる. 各頂点 v に対し

$$r(v) = \sup \{ \rho(v); \rho \in \mathcal{R} \}$$

とおく.

まず各内頂点 v に対して $r(v) < +\infty$ を示す. 仮にある内頂点において $r(v) = +\infty$ であつたとすると $r'(v)$ がいくらでも大きくなるように $r' \in \mathcal{R}$ がとれる. 補題より, ある v' に対して r' の v' における曲率 $K_{r'}(v')$ が正になつてしまい \mathcal{R} の定義に反する. ゆえに各内頂点 v に対して $r(v) < +\infty$ である.

全く同じ論法から, 各内頂点 v に対して $K_r(v) \leq 0$ がわかる. したがって $r \in \mathcal{R}$ である.

r を境界上での値を $+\infty$ と定義し直すことによつて修正したものを r' とする. r を r' にとりかえることによる曲率への影響は境界に隣接する頂点のみに現われる. v をそのような

頂点のひとつとすると、補題より $K_{r'}(v) \leq K_r(v) \leq 0$.

ゆえに $r' \in \mathcal{R}$. これは $r = r'$, つまり境界上の各点において $r(v) = +\infty$ であることを意味する.

これで r が (1) をみたすことがわかった. 後は (2) である. 仮にある内頂点 v に対して $K_r(v) < 0$ であったとする. r を v における値だけ少し大きくとりかえて, $K_r(v) < K_{r'}(v) \leq 0$ とできる. 補題より, v に隣接する頂点 v' においては $K_{r'}(v') \leq K_r(v') \leq 0$. したがって $r' \in \mathcal{R}$ であるが, これは r の定義に反する. よって r が (2) をみたすことが示された.

唯一性を示すためにある $s \in \mathcal{R}$ が (1) と (2) をみたしているとする. このとき各内頂点で $s \leq r$ である. もし $s \neq r$ であるなら $V_0 = \{v \in V : s(v) < r(v)\}$ は V の空でない部分集合である. このとき

$$(3) \quad \sum_{v \in V_0} K_s(v) < \sum_{v \in V_0} K_r(v)$$

であることが次のようにして示される.

V_0 に属する頂点をもつ T の三角形を考える. これらの三角形について, V_0 のひとつをその頂点としてもつ角 A は3つのタイプ α, β, γ に分けられる: 三角形での角のうち, 角 A が V_0 に属する頂点をもつ唯一の角であるとき A はタイプ α である; 三角形での角のうち, ちょうど2つの角が V_0 に属する頂点をもつ角であるとき A はタイプ β である; 三角形

てのすべての角が γ_0 に頂点をもつ角であるとき A はタイプ γ である。 r で測った A の角度つまり $T(r, \tau)$ の A に対応する角の角度を $\theta_r(A)$ と表わす。もし A がタイプ α なら $\theta_s(A) > \theta_r(A)$ である。もし A がタイプ β なら τ の角の中にもう一つタイプ β の角 A' があり、 $\theta_s(A) + \theta_s(A') > \theta_r(A) + \theta_r(A')$ である。もし A がタイプ γ なら τ の残る2つの角 A', A'' はタイプ γ であり、 $\theta_s(A) + \theta_s(A') + \theta_s(A'') > \theta_r(A) + \theta_r(A') + \theta_r(A'')$ である。以上のことから (3) を得るが、 r と s は共に (2) をみたすので不合理である。したがって $s = r$ であり、定理2の証明が完結した。

定理1の証明. 定理2より (1) と (2) をみたす \bar{S} 上の hyperbolic radius function r が存在する。 r によって決まる complete hyperbolic surface $\text{Poly}(\bar{S})$ の metric を \bar{S} から $\text{Poly}(\bar{S})$ へのある単体同相写像によって引きもどした metric を λ_r と書く。 λ_r は S 上、定曲率 -1 をもつ完備な metric であり、 \bar{S} に等角構造を定める。 r が定める circle packing の nerve は T であるから、これで定理1の存在部分を示された。

λ_1 は S 上の定曲率 -1 をもつ完備な metric、 r_1 は metric λ_1 におけるある circle packing が定める hyperbolic radius function で、その nerve が T であるとする。このとき r_1 は

\mathcal{V} 上の hyperbolic radius function で (1) と (2) をみたとす。
よって定理 2 より $r_1 = r$.

$\pi_1(\pi)$ を $\lambda_1(\lambda)$ -等角な普遍被覆写像とする。 T の三角形 τ に対して, $\pi_1^{-1}(\tau)$ の各成分は $T(r_1, \tau)$ の等長写像による像。 $r_1 = r$ だから $\pi_1^{-1}(\tau)$ の成分と $\pi^{-1}(\tau)$ の成分は双曲的等長な三角形であり, この等長変換は λ_1 -metric から λ -metric への等長写像であるような τ の自己同相写像 ψ を導く。 τ と τ' がある T の辺 e を共有する三角形であるとする。 このとき $\pi_1^{-1}(\tau \cup \tau')$ の各成分は, $T(r_1, \tau)$ と $T(r_1, \tau')$ を e に対応する辺を共有し内部は重ならないように D 上においたものの等長写像による像である。 このことに注意すれば, 各三角形ごとに定義した写像 ψ は \bar{S} 上の自己同相写像であり, しかも λ_1 -metric から λ -metric への等長変換であることがわかる。 もちろん定義から, ψ は T の各三角形をそれぞれ自身に写す。

定理 2 と全く同様にして次の定理が証明される。

定理 2'. \bar{S} をコンパクトな, 境界付きの面とし, T をその三角形分割とする。 \bar{S} は球やトーラスではないとする。 T の頂点の集合 \mathcal{V} を内頂点の集合 \mathcal{V}' と境界上の頂点の集合 \mathcal{V}'' に分ける。 α を \mathcal{V}' から $(-\infty, 2\pi]$ への写像, β を \mathcal{V}'' から $(0, +\infty]$

への写像とする.

も \bar{S} 上の hyperbolic radius function r で

$$(1') \quad V'' \text{ 上 } r(v) \leq \beta(v)$$

と

$$(2') \quad V' \text{ 上 } K_r(v) \leq K(v)$$

をみたすものが存在すれば, (1') と (2') において等号が成立するような \bar{S} 上の hyperbolic radius function が唯一つ存在する.

系 (punctured closed surface の circle packing).
 S を種数 2 以上の閉じた面, T をその三角形分割とする. V を T の頂点の集合とし, V_0 をその部分集合とする. このとき \bar{S} 上の hyperbolic radius function r で

$$(4) \quad V_0 \text{ 上で } K_r(v) = 2\pi,$$

$$(5) \quad V \setminus V_0 \text{ 上で } K_r(v) = 0$$

であるようなものが唯一つ存在する. さらに, $\text{Cone}(r)$ 上の metric を S に写した metric λ_r は $S \setminus V_0$ 上の Poincaré 計量である.

系の証明. V 上の函数 K を $K(v) = 2\pi$ ($v \in V_0$), $K(v) = 0$ ($v \in V \setminus V_0$) で定義する. 定理 2 (あるいは Thurston の

定理) より λ は定理 2' の仮定をみたす。したがって定理 2' より, (4) と (5) をみたす \bar{S} 上の hyperbolic radius function r が存在する。(5) は λ_r が $S \setminus V_0$ 上に特異点をもたないことを, (4) は λ_r が完備であることを意味する。 λ_r は定曲率 -1 をもつから λ_r は $S \setminus V_0$ 上の Poincaré 計量である。